11/12/2017

Μαθημα 18ο
Διαφορικη Γεωμετρια

Ταξινομηση σημειων επιφανειων

- **Ελλειπτικα σημεια**

  $K(p)>0$ ($\Leftrightarrow$ II_p ειναι θετικως ή αρνητικως οριστη)

- **Υπερβολικα σημεια**

  $K(p)<0$ ($\Leftrightarrow$ II_p ειναι αοριστη)

- **Παραβολικα σημεια**

  $K(p)=0\neq H(p)$ (II_p θετικως ή αρνητικως ημιορισμενη)
  (τετοια ειναι τα σημεια του κυλινδρου)

- **Ισοπεδα σημεια**

  $K(p)=0=H(p)$ ($\Leftrightarrow$ $k_1(p)=k_2(p)=0$ $\Leftrightarrow$ $II_p=0$)

- **Ομφαλικα σημεια**

  $H^2(p)=K(p)\neq 0$ ($\Leftrightarrow$ $k_1(p)=k_2(p)\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $II_p=\lambda I_p,\ \lambda\neq 0$)

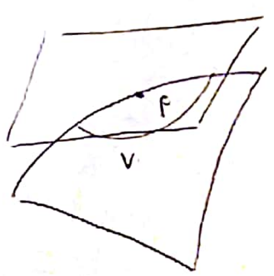
$$\Leftrightarrow \quad \frac{e}{E}=\frac{f}{F}=\frac{g}{G}=\lambda\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} e=\lambda E \\ f=\lambda F \\ g=\lambda G \end{array}\right. \qquad \underline{\lambda\neq 0}$$

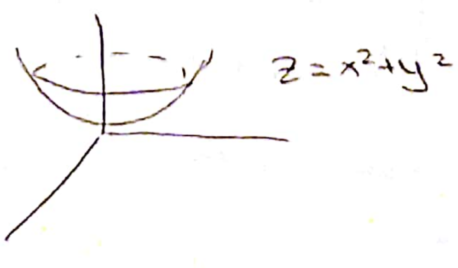
⊕ αν $F=0$ και $f\neq 0$ $\Rightarrow$ δεν υπαρχουν ομφαλικα σημεια

Θεωρημα

Εστω $p\in S$ με S = κανονικη επιφανεια

i) Αν το p ειναι ελλειπτικο τοτε υπαρχει περιοχη V στο S τ.ω $V\cap T_pS=\{p\}$





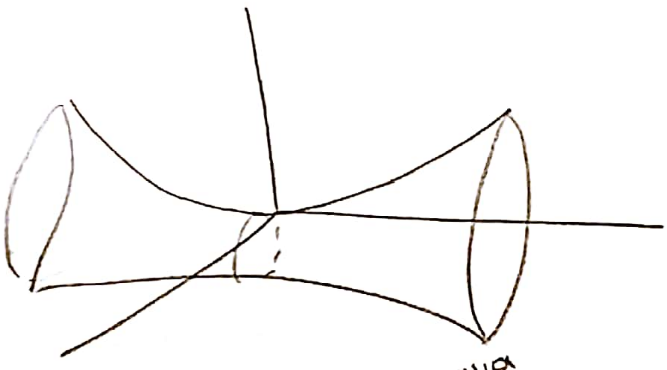
ii) Αν το σημείο p είναι υπερβολικό τότε σε κάθε περιοχή του p υπάρχουν σημεία της S που ανήκουν και στους δύο ημιχώρους που ορίζει το T_pS

Παράδειγμα (με υπερβολικό σημείο)

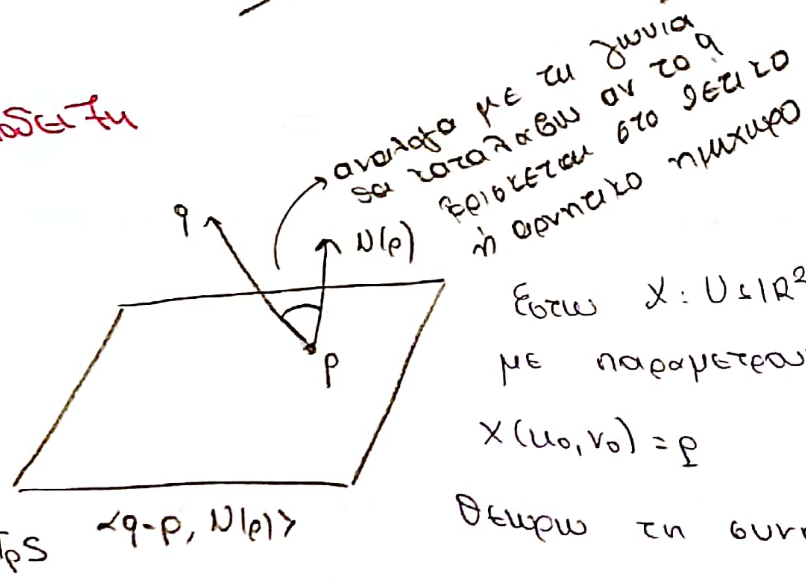
$S: z = x^2 - y^2$

Η S και το γράφημα Γ_h της $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $h(x,y) = x^2 - y^2$ με καμπυλότητα Gauss

$$K = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2} = \frac{4}{(1+4x^2+4y^2)^2} < 0 \quad \text{(σαγματικό σημείο)}$$



Απόδειξη



Έστω $X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u,v) \in U$ και $X(u_0,v_0) = p$

Θεωρώ τη συνάρτηση $h: U \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} h(u,v) = \langle X(u,v) - X(u_0,v_0), N \circ X(u_0,v_0) \rangle \\ h(u_0,v_0) = 0 \end{cases}$$

Έχω πρόβλημα ακροτάτων

$$\left\{\begin{array}{l} h_u(u,v) = \langle X_u(u,v), N_0 x(u_0,v_0)\rangle \\ h_v(u,v) = \langle X_v(u,v), N_0 x(u_0,v_0)\rangle \end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{l} h_u(u_0,v_0) = 0 \\ h_v(u_0,v_0) = 0 \end{array}$$

- $h_{uu}(u,v) = \langle X_{uu}(u,v), N_0 x(u_0,v_0)\rangle$
- $h_{uv}(u,v) = \langle X_{uv}(u,v), N_0 X(u_0,v_0)\rangle$
- $h_{vv}(u,v) = \langle X_{vv}(u,v), N_0 X(u_0,v_0)\rangle$

$h_{uu}(u_0,v_0) = \langle X_{uu}(u_0,v_0), N_0 X(u_0,v_0)\rangle \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} h_{uu}(u_0,v_0) = e(u_0,v_0) \quad \text{1º θεμ. ποσό δευτερης τοπ/ης.} \\ h_{uv}(u_0,v_0) = f(u_0,v_0) \\ h_{vu}(u_0,v_0) = g(u_0,v_0) \end{array}\right.$$

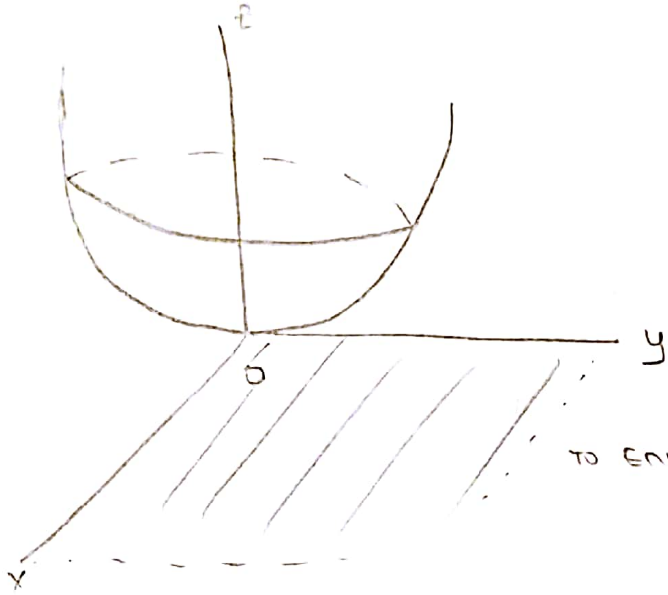
i) Εστω οτι το p ειναι ελλειπτικο αρα $K(p)>0$. Ισχυει ομως $K = \dfrac{eg-f^2}{EG-F^2}$ οποτε $(eg^2-f^2)(u_0,v_0)>0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} h_{uu}(u_0,v_0) & h_{uv}(u_0,v_0) \\ h_{vu}(u_0,v_0) & h_{vv}(u_0,v_0) \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow$ η h λαμβανει γνησιο τοπικο μεγιστο ή γνησιο τοπικο ελαχιστο στο (u_0,v_0)

ii) Εστω οτι το p ειναι υπερβολικο $\Rightarrow K(p)<0 \Leftrightarrow (eg-f^2)(u_0,v_0)<0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} h_{uu}(u_0,v_0) & h_{uv}(u_0,v_0) \\ h_{vu}(u_0,v_0) & h_{vv}(u_0,v_0) \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow$ η h δε λαμβανει ουτε max ουτε min στο (u_0,v_0)

•

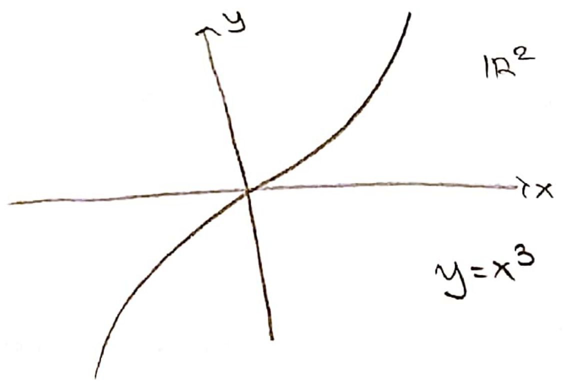


$z = x^4 + y^4$

Το O είναι ισοπεδο

Καμπ. Gauss = Μεση καμπ. = 0

• $z = x^3$



$y = x^3$ (κυβική καμπύλη)

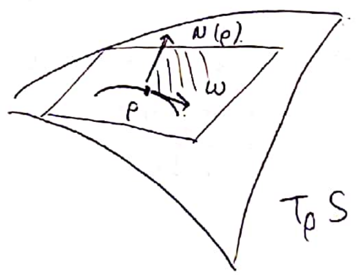
Στο $\mathbb{R}^3$ η κυβική καμπύλη γίνεται κύλινδρος.

Θυμάμαι

Κάθετη καμπυλότητα

$w \in T_pS - \{0\}$

$k_n(w) = \dfrac{II_p(w)}{I_p(w)}$



ορισμος

α διανυσμα $w \in T_pS \setminus \{0\}$ καλειται ασυμπτωτικη διευθυνση

$\Rightarrow k_n(w)=0$

Θεωρω συστημα συντ. $X: U \to S'$ με $p = X(u_0,v_0)$, $(u_0,v_0) \in U$

Το $w = a X_u(u_0,v_0) + b X_v(u_0,v_0)$ ειναι ασυμπτωτικη διευθυνση

$\Leftrightarrow$ $II_p(w)=0$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{e(u_0,v_0)\, a^2 + 2f(u_0,v_0)\, ab + g(u_0,v_0)\, b^2 = 0}$

$\Leftrightarrow$ $e(u_0,v_0)\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2f(u_0,v_0)\cdot \frac{a}{b} + g(u_0,v_0)=0$ ή

$e(u_0,v_0) + 2f(u_0,v_0)\left(\frac{b}{a}\right) + g(u_0,v_0)\left(\frac{b}{a}\right)^2=0$

$\Delta = 4f^2(u_0,v_0) - 4\, e(u_0,v_0)\, g(u_0,v_0) =$

$= 4\left(f^2(u_0,v_0) - e(u_0,v_0)\, g(u_0,v_0)\right) \geq 0$ για να εχει λυση

Προταση

Σε ενα σημειο της $p \in S'$ υπαρχουν ασυμπτωτικες διευθυνσεις $\Leftrightarrow$ $K(p) \leq 0$

$\Leftrightarrow$ p ειναι παραβολικο, υπερβολικο ή ισοπεδο

Επιπλεον

α) Στο p υπαρχουν 2 ακριβως ασυμπτωτικες διευθ $\Leftrightarrow$ p ειναι υπερβολικο

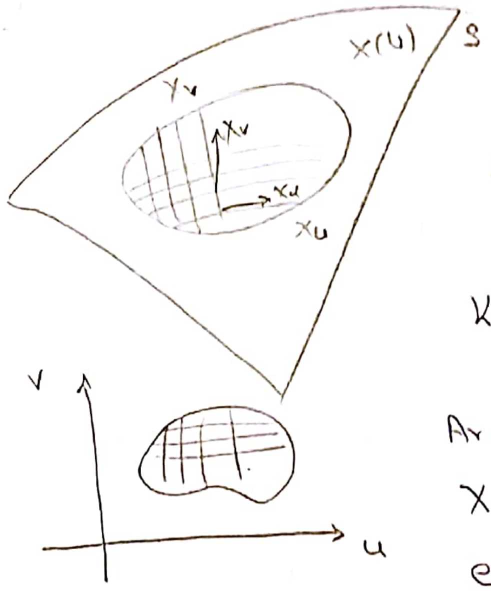
β) Στο p υπαρχει 1 ακριβως ασυμπτωτικη διευθ $\Leftrightarrow$ p ειναι παραβολικο

γ) Στο p υπαρχουν 3 τουλαχιστον (και αρα απειρες) α.δ $\Leftrightarrow$ p ειναι ισοπεδο

Ορισμος

Μια κανονικη επιφανειακη καμπυλη $c: I \subset \mathbb{R} \to S'$ καλειται ασυμπτωτικη καμπυλη (ή ασυμπτωτικη γραμμη) $\Leftrightarrow$ το εφαπτομενο διανυσμα $c'(t)$ ειναι ασυμπτωτικη διευθυνση της S' $\forall t \in I$

Εστω $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ συστημα συντ με παραμετρους $(u,v) \in U$
Η καμπυλη $c(t) = (u(t), v(t))$ ειναι ασυμπτωτικη καμπυλη ανν
$c'(t) = u' X_u(u(t),v(t)) + v'(t) X_v(u(t),v(t))$ ειναι ασυμπτωτικη διευθ (=)
$e(u(t),v(t))(u'(t))^2 + 2f(u(t),v(t))u' \cdot v' + g(u(t),v(t))(u'(t))^2 = 0$
Εστω S' κανονικη καμπυλη του $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to S'$ συστημα συντ



Συμφωνα με τον τυπο απο επανω

$$K_n(\underset{=w}{aX_u + bX_v}) = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}$$

$$K_n(X_u) = \frac{e}{E}, \quad K_n(X_v) = \frac{g}{G}$$

Αν οι καμπυλες $X(u, v = \sigma\tau\alpha\theta)$ και $X(u = \sigma\tau\alpha\theta, v)$ ειναι ασυμπτωτικες $\Rightarrow$ $e = g = 0$

Αντιστροφα, ειναι $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ συστημα συντ. τ.ω $e = g = 0$
Η καμπυλη $x(t) = X(u(t), v(t))$ ειναι ασυμπτωτικη $\Leftrightarrow$

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(u')^2 = 0 \Leftrightarrow 2f(u(t),v(t))u'v' = 0$$

Προταση

Εστω $X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S'$ συστημα συντ. Οι παραμετρικες καμπυλες του X ειναι ασυμπτ. καμπυλες ανν ισχυει $e = g = 0$

Παράδειγμα

Δίνεται η επιφάνεια $S: z=x^2-y^2$. Να βρεθούν οι ασυμπτωτικές καμπύλες αν υπάρχουν

Λύση

$K<0$

Είδαμε ότι όλα τα σημεία είναι υπερβολικά.

$S=\Gamma_h,\ h(x,y)=x^2-y^2$

Θεωρώ το σύστημα συντ.

$X: U\subset\mathbb{R}^2 \to S,\ X(u,v)=(u,v,u^2-v^2)$

Η $c(t)=X(u(t),v(t))$ είναι ασυμπτωτικές $\Leftrightarrow$

$e(u(t),v(t))\cdot(u'(t))^2+2f\,u'v'+g(v')^2=0$

$$N=\frac{X_u\times X_v}{\|X_u\times X_v\|},\quad e=\langle X_{uu},N\rangle,\ f=\langle X_{uv},N\rangle,\ g=\langle X_{vv},N\rangle \quad (*)$$

$X_u=(1,0,2u),\quad X_v=(0,1,-2v)$

$X_{uu}=(0,0,2),\quad X_{uv}=0,\quad X_{vv}=(0,0,-2)$

$$X_u\times X_v=\begin{vmatrix}\varepsilon_1&\varepsilon_2&\varepsilon_3\\1&0&2u\\0&1&-2v\end{vmatrix}\Rightarrow N=\frac{(-2u,+2v,1)}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$$

$$e=\frac{2}{\sqrt{}},\quad g=-\frac{2}{\sqrt{}},\quad f=0$$

$(*)\Leftrightarrow 2(u'(t))^2-2(v'(t))^2=0 \Leftrightarrow (u(t)+v(t))'(u(t)-v(t))'=0$

Άρα η $(u(t)+v(t))'=0$ ή $(u(t)-v(t))'=0$

δηλαδή η $u(t)+v(t)=a_1=\text{σταθ}$ ή

$u(t)-v(t)=a_2=\text{σταθ}$

1^{η} περίπτωση

$u(t) = t$

$v(t) = a_1 - t$

$$c(t) = X(t, a_1 - t) = (t, a_1 - t, t^2 - (a_1 - t)^2) =$$
$$= (t, a_1 - t, 2a_1 t - a_1^2) = (0, a_1 - a_1^2) + t\underbrace{(1, -1, 2a_1)}_{\neq 0}$$

Είναι μια οικογένειοι ευθεία παράλληλη στο $(1, -1, 2a) \neq 0$

2^{η} περίπτωση

$u(t) = t, \quad v(t) = a_2 + t.$

$$C(t) = X(t, a_2 + t) = (t, a_2 + t, t^2 - (a_2 + t)^2) =$$
$$= (t, a_2 + t, -a_2^2 - 2a_2 t) = (0, a_2 - a_2^2) + t(1, 1, -2a_2)$$

άλλη οικογένεια ευθειών διαφορετική από την προηγούμενη.

$z = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ δυο ευθείες.

$\{x - y = \lambda, \quad z = \lambda(x+y)\}$ τομή επιπέδων (άρα ευθεία)

$\{x + y = \lambda, \quad z = \lambda(x-y)\}$ ευθεία πάλι

Ορισμός

Ένα σύστημα συντεταγμένων καλείται σύστημα ασυμπτωτικών καμπυλών $\Leftrightarrow$ οι παραμετρικές του καμπύλες είναι ασυμπτωτικές